

УДК 618.513(045)

Житецький Л.С., канд. техн. наук  
Сущенко О.А., канд. техн. наук  
Сенькович О.В.  
Пономарьов О.С.

## ДИНАМІКА ЦИФРОВИХ СЛІДКУЮЧИХ СИСТЕМ ЗІ ЗВ'ЯЗКАМИ ЗА ЗАДАВАЛЬНИМ ВПЛИВОМ

Інститут електроніки та систем управління  
Національного авіаційного університету

*Досліджено динамічні процеси, що виникають в інваріантних сліdkуючих системах з безпосереднім та опосередкованим зв'язками за задавальним впливом в перехідних і усталених режимах функціонування. Встановлена робастність цих систем*

### Вступ

Сучасний етап науково-технічного прогресу характеризується значним підвищенням вимог до показників якості функціонування систем управління різного призначення, в тому числі систем управління рухомими об'єктами, радіолокаційних систем автосупроводження літальних апаратів, систем управління радіоастрономічними інструментами, навігаційних систем тощо. Одним з таких показників виступає, зокрема, точність відтворення заданої траєкторії руху тих чи інших динамічних систем [1].

Можливість суттєвого підвищення точності сліdkуючих систем відкриває реалізація принципу компенсації похибки, широко відомого в літературі як принцип інваріантності [2]. Теорія інваріантності автоматичних систем досягла свого апогею в середині 60-х років минулого сторіччя. Вона дістала розвиток в багатьох роботах відомих вчених колишнього СРСР. Основні положення теорії інваріантності узагальнені в монографіях [2, 3], в яких переважно розглядались неперервні системи управління. Ці положення вдалось розповсюдити на клас дискретних мінімально-фазових систем управління в роботі [4], в якій вони вперше були повно і систематизовано викладені. Пізніше ідеї теорії інваріантності дискретних (цифрових) систем розвивались одним з авторів в роботах [5, 6], де розглядались дискретні немінимально-фазові системи. На разі

після тривалого затишшя ця теорія отримала нове «дихання» [7].

На відміну від неперервних інваріантних систем компенсуючий сигнал в цифрових системах містить перехідну складову. Природньо, що цей факт повинен певним чином позначитись на динаміці таких систем. Проте жодних досліджень особливостей перехідних процесів у таких системах в усіх доступних авторам літературних джерелах знайти не вдалось. Залишилось невідомим, зокрема, як буде поводитись цифрова сліdkуюча система з компенсатором, охопленим внутрішнім зворотним зв'язком при необмеженому зростанні частоти квантування сигналів.

В роботі [6, гл. II, §4] встановлено, що в інваріантних цифрових сліdkуючих системах виникають приховані коливання вихідної змінної. Такі коливання в принципі можуть позначитися на точності систем. Але ніяких досліджень цих прихованих коливань, крім дослідження коливань в перехідних режимах функціонування систем при лінійному задавальному впливі [6, гл. II], раніше, на жаль, не проводилось.

Відомо [1, 8], що існує певний клас сліdkуючих систем, в яких задавальний вплив недоступний для вимірювання. До них належать, зокрема, системи автосупроводження літальних апаратів на базі радіолокаційних станцій спостереження (РЛС) [9]. В таких системах доцільно вводити опосередкований зв'язок за задавальним впливом, як пропонується в кни-

зі [8], де розглядаються неперервні інваріантні системи.

При побудові інваріантних систем з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом постає одна важлива проблема, яка в термінах сучасної теорії управління може бути віднесена до проблеми робастної стійкості цього класу систем [7]. В свій час на початковому етапі становлення теорії інваріантності склались дві протилежні думки відносно можливості компенсації динамічної похибки в системах з опосередкованими зв'язками за зовнішніми впливами без втрати стійкості таких систем. Одні вчені, розглядаючи неперервні інваріантні системи з опосередкованим вимірюванням задавального впливу і збурення одночасно [2, 3], вважали, що вони не будуть робастними. Іншу позицію займали вчені, які розглядали неперервні слідкуючі системи з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом [8]. Останні наполягали, що при виконанні умов інваріантності такі системи еквівалентні системам з безпосереднім зв'язком за цим впливом.

Ідея опосередкованого вимірювання задавального впливу в дискретних слідкуючих системах уперше, мабуть, була висунута В.М. Кунцевичем і Ю.В. Кремєнтуло [4]. Хоча після появи роботи [4] пройшло досить багато часу, але питання про те, чи буде така система робастно стійка, чи ні, досі залишається відкритим: ніяких публікацій в цьому напрямку досліджень знайти не вдалось.

Незалежно від того, як організований зв'язок за задавальним впливом, для компенсації похибки системи з умов інваріантності необхідно мати точну інформацію про структуру і параметри слідкуючого приводу. Проте таку інформацію досить важко отримати на практиці. Тому доводиться будувати компенсатор за спрощеною моделлю слідкуючого приводу, нехтуючи його малими параметрами. А це приводить до появи немодельованої динаміки. Натомість немає робіт, в яких була б дана оцінка робастності інваріант-

них систем в умовах немодельованої динаміки.

Метою даної роботи є аналіз динамічних процесів, які виникають в цифрових слідкуючих системах з безпосереднім і опосередкованим зв'язками за задавальним впливом в перехідному та усталеному режимах функціонування.

### Задачі дослідження

Розглянемо цифрову слідкуючу систему, яка містить електричний привід в якості об'єкта управління. Обмежимося далі прийнятим в роботі [9] припущенням, що цей привід в розімкненому стані можна описати передавальною функцією

$$W_0(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (1)$$

у якій  $k$  – коефіцієнт підсилення, а  $\tau_1, \tau_2$  – сталі часу. Будемо вважати, що  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ .

Позначимо через  $\varphi(t)$  вихідну змінну системи, яка в кожний момент часу  $t$  залежить від поточного кутового положення ротора електричного двигуна. Нехай можна періодично вимірювати цю змінну з деяким періодом  $T_0$ , отримуючи послідовність  $\{\varphi_n\} = \varphi_1, \varphi_2, \dots$  вимірів у моменти часу  $t = nT_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Вважається, що задавальний вплив, який визначає бажане значення вихідної змінної  $\varphi(t)$  в будь-який момент  $t$ , являє собою деяку гладку функцію  $\varphi^0(t)$ .

Введемо позначення поточної похибки слідкуючої системи:

$$e(t) := \varphi^0(t) - \varphi(t). \quad (2)$$

Для компенсації похибки  $e_n$  в кожний  $n$ -й дискретний момент часу вводиться зв'язок за задавальним впливом  $\varphi_n^0$ . При цьому в залежності від того, чи доступна для вимірювання змінна  $\varphi_n^0$ , чи ні, цифрова слідкуюча система будується або за схемою рис. 1 а, або за схемою рис. 1 б.

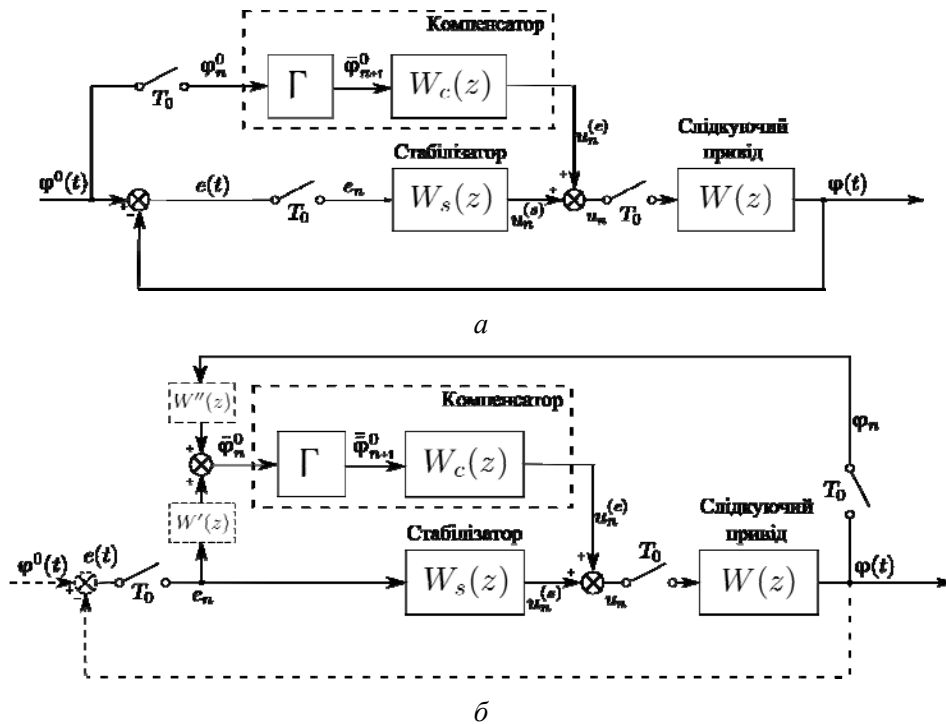


Рис. 1. Структурні схеми цифрових слідкуючих систем: а) з безпосереднім зв'язком за задавальним впливом; б) з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом

Вхідним сигналом компенсатора в схемі рис. 1 а служить безпосередньо сам сигнал  $\varphi_n^0$ , тоді як в схемі рис. 1 б – його оцінка  $\tilde{y}_n^0$ , отримана опосередковано у своєрідній символічній формі запису як

$$\tilde{y}^0 = W'e + W''y. \quad (3)$$

У цьому виразі  $W'(z)$  і  $W''(z)$  – дискретні передавальні функції перетворювачів сигналів  $e_n$  і  $y_n$  відповідно. Якщо вони ідентичні, причому  $W'(z) \equiv W''(z) \equiv 1$ , то опосередкований зв'язок за задавальним впливом  $y_n^0$  дає його оцінку

$$\tilde{y}_n^0 = e_n + y_n, \quad (4)$$

яка, у відповідності до співвідношення (2), записаного для моменту часу  $t = nT_0$ , співпадає з фактичним його значенням.

Зв'язок між послідовністю  $\{\varphi_n\}$  значень вихідної змінної і послідовністю  $\{u_n\}$  керуючих дій, що залишаються сталими протягом кожного  $n$ -го інтервалу часу  $(nT_0, (n+1)T_0)$ , описується дискретною передавальною функцією  $W_0(z)$  так

званої приведеної неперервної частини системи. Відомо, що вона визначається у загальному випадку так:

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\}.$$

У випадку, коли  $W_0(s)$  описується дробово-раціональною функцією (1), маємо

$$W_0(z) = \frac{B(z)}{(z-1)(z-e^{-\beta_1})(z-e^{-\beta_2})}. \quad (5)$$

Тут

$$B(z) = b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \quad (6)$$

– поліном, коефіцієнти якого певним чином залежать від безрозмірних величин  $kT_0$ ,  $\beta_1 = T_0 / \tau_1$ ,  $\beta_2 = T_0 / \tau_2$  [6, гл. II].

Керуюча дія  $u_n$  у схемах рис.1 визначається сумою

$$u_n = u_n^{(c)} + u_n^{(s)}, \quad (7)$$

у якій складова  $u_n^{(c)}$  – сигнал, що має формуватися компенсатором, а  $u_n^{(s)}$  – сигнал на виході стабілізатора, призначеного для забезпечення стійкості системи.

Позначимо через  $W_c(z)$ ,  $W_s(z)$  передавальні функції компенсатора і стабілізатора відповідно. Тоді задачі дослідження можна сформулювати наступним чином. Необхідно:

1) дослідити динамічні властивості розімкненого контуру, включаючи характер процесу  $\{u_n^{(c)}\}$  при  $T_0 \rightarrow 0$ ;

2) проаналізувати приховані коливання в системах, в яких забезпечуються умови інваріантності для дискретних моментів часу;

3) встановити, чи буде гарантована робастна стійкість системи з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом  $\bar{y}_n^0$  у випадках, коли перетворювачі дискретних сигналів  $e_n$  і  $y_n$  неідентичні, тобто  $W'(z) \neq W''(z)$ ;

4) дати оцінку робастності системи за наявності немодельованої динаміки, що з'являється при виборі параметрів компенсатора за спрощеною моделлю об'єкта (слідкуючого приводу).

### Алгоритми управління

Якщо припустити, що  $\tau_2 = 0$ , то передавальна функція (5) з врахуванням (6) набуває вигляду

$$W_0(z) = \frac{B^0(z)}{(z-1)(z-e^{-\beta_1})}, \quad (8)$$

де коефіцієнти

$$\left. \begin{aligned} b_1^0 &= k\tau_1(\beta_1 + e^{-\beta_1} - 1), \\ b_2^0 &= k\tau_1(1 - e^{-\beta_1} - \beta e^{-\beta_1}) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

полінома

$$B^0(z) = b_1^0 z + b_2^0, \quad (10)$$

задовольняють співвідношення

$$b_1^0 > b_2^0 > 0, \quad (11)$$

при будь-якому  $\beta_1 \in (0, \infty)$  [6, гл. II, §4]. В цьому випадку для виконання умови інваріантності для дискретних моментів часу передавальна функція  $W_c(z)$  дискретного фільтра в схемі рис. 1 вибирається як

$$W_c(z) = \frac{z^{-1}}{W_0(z)}. \quad (12)$$

Відповідний цій умові алгоритм формування послідовності  $\{u_n^{(c)}\}$  сигналів на виході компенсатора в схемі рис.1,а, який визначається рекурентним співвідношенням

$$u_n^{(c)} = \frac{1}{b_1^0} \Delta \bar{\varphi}_{n+1}^0 - \frac{e^{-\beta_1}}{b_1^0} \Delta \varphi_n^0 - \frac{b_2^0}{b_1^0} u_{n-1}^{(c)}, \quad (13)$$

передбачає прогнозування зміни  $\Delta \varphi_n^0 := \varphi_{n+1}^0 - \varphi_n^0$  задавального впливу на один крок вперед:

$$\Delta \bar{\varphi}_{n+1}^0 = \bar{\varphi}_{n+1}^0 - \varphi_n^0.$$

Тут  $\bar{\varphi}_{n+1}^0$  позначає прогнозоване в  $n$ -й момент часу значення, що матиме задавальний вплив у наступний  $(n+1)$ -й дискретний момент часу.

Для забезпечення стійкості слідкуючої системи, як і в попередній роботі [9] авторів, можна вибрати дискретну передавальну функцію  $W_s(z)$  стабілізатора як дробово-раціональну функцію

$$W_s(z) = \frac{G(z)}{F(z)}, \quad (14)$$

з чисельником  $G(z) = g_0 z + g_1$  і знаменником  $F(z) = z + f_1$ , що задовольняють поліноміальне рівняння

$$A^0(z)F(z) + B^0(z)G(z) = z^3,$$

у якому

$$A^0(z) = (z-1)(z-e^{-\beta_1}). \quad (15)$$

Відповідно до (14) алгоритм формування послідовності  $\{u_n^{(s)}\}$  на виході стабілізатора має вигляд

$$u_n^{(s)} = g_0 e_n + g_1 e_{n-1} - f_1 u_{n-1}^{(s)}. \quad (16)$$

Алгоритм (16), як відомо, дозволяє не тільки забезпечити стійкість замкненої системи, але й завершити перехідний процес у цій системі за скінченний час.

Проте в принципі можна запропонувати значно простіший алгоритм стабілізації, а саме алгоритм

$$u_n^{(s)} = k_s e_n, \quad (17)$$

який по суті реалізує стандартний П-закон управління. Коефіцієнт  $k_s$ , що фігурує у алгоритмі (17) і визначає іншу передавальну функцію

$$W_s(z) = k_s, \quad (18)$$

повинен задовольняти обмеження

$$0 < k_s < k_s^*,$$

у якому граничне значення  $k_s^*$  знаходиться з умов стійкості характеристичного полінома

$$L(z) = k_s B^0(z) + A^0(z).$$

### **Динамічні властивості ланцюга прямого зв'язку системи**

Характерною рисою процедури формування компенсуючого впливу  $u_n^{(c)}$  за алгоритмом (13), здатного забезпечити інваріантність похибки  $e_n$ , полягає в тому, що на відміну від сигналу

$$u_*^{(c)}(t) = \frac{1}{k} \frac{d\phi^0(t)}{dt} + \frac{\tau_1}{k} \frac{d^2\phi^0(t)}{dt^2}, \quad (19)$$

який у відповідності до [2] має формуватися в ідеальній неперервній слідкуючій системі за наявності приводу з тією ж передавальною функцією (1) при  $\tau_2 = 0$ , ця процедура вимагає побудови компенсатора з внутрішнім зворотним зв'язком. При нульових початкових умовах такий зв'язок неминуче повинен привести до появи перехідного процесу  $\{u_n^{(c)}\}$ , що визначається одним полюсом передавальної функції

$$W_c(z) = \frac{(z-1)(z-e^{-\beta_1})}{(b_1^0 z + b_2^0)z}, \quad (20)$$

записаної з урахуванням (8), (10), (12). Цей полюс співпадає з нулем  $z_1 = -b_2^0/b_1^0$

передавальної функції  $W_0(z)$ , який згідно з (8) – (10) має вигляд

$$z_1 = \frac{1 - e^{-\beta_1} - \beta_1 e^{-\beta_1}}{\beta_1 + e^{-\beta_1} - 1}, \quad (21)$$

і у відповідності до (11) задовольняє обмеження

$$-1 < z_1 < 0. \quad (22)$$

Вираз (20) з урахуванням (22) дозволяє твердити, що перехідний процес в ланцюгу прямого зв'язку за задавальним впливом  $\phi_n^0$  матиме затухаючий коливальний характер, причому частота коливань складатиме величину  $\tilde{f} = \frac{1}{2T_0}$ .

Оцінимо тривалість даного процесу найменшим числом  $n_\infty$  інтервалів квантування сигналів, протягом якого перехідна складова процесу  $\{u_n^{(c)}\}$  затухне в  $\eta^{-1}$  разів, де  $\eta$  – деяке заздалегідь вибране достатньо мале число ( $0 < \eta \ll 1$ ). Тоді  $n_\infty$  буде, очевидно, задовольняти показникове рівняння

$$|z_1|^{n_\infty} = \eta. \quad (23)$$

В роботі [6, гл. II, §4] встановлено, що  $|z_1| \rightarrow 1$  при  $\beta_1 \rightarrow 0$ . Тому на перший погляд здається, що згідно з (23) тривалість перехідного процесу необмежено збільшуватиметься, коли  $T_0 \rightarrow 0$ . Виявляється, що в дійсності це зовсім не так: адже тривалість  $t_\infty$  у часі цього процесу складає величину

$$t_\infty = n_\infty T_0, \quad (24)$$

яка у цьому випадку стає невизначеною ( $\infty \cdot 0$ ) і потребує розкриття.

Враховуючи вирази (22), (24) та згадуючи, що  $\beta_1 = T_0/\tau_1$ , з (23) знаходимо

$$\bar{t}_\infty = \beta_1 \left[ \frac{\ln \eta}{\ln(1 - e^{-\beta_1} - \beta_1 e^{-\beta_1}) - \ln(\beta_1 + e^{-\beta_1} - 1)} \right], \quad (25)$$

де  $\bar{t}_\infty = t_\infty/\tau_1$  позначає відносну тривалість даного перехідного процесу.

Графік залежності  $\bar{t}_\infty$  від  $\beta_1$  при  $\eta = 0.01$  зображено на рис. 2.

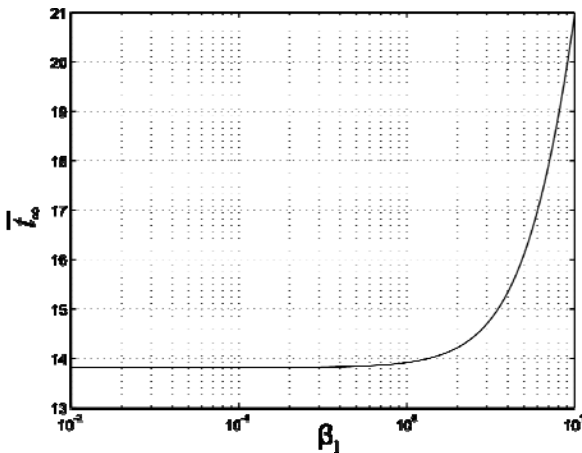


Рис. 2. Залежність відносної тривалості перехідного процесу від величини  $\beta_1 = T_0/\tau_1$

Як видно з рис. 2, при зменшенні  $T_0$  і фіксованому  $\tau_1$  величина  $t_\infty$  зменшується, залишаючись обмеженою знизу значенням

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} t_\infty = 3\tau_1 \ln \eta^{-1},$$

отриманим після граничного переходу в (25) при  $\beta_1 \rightarrow 0$ .

У відповідності до (20) оцінка зверху абсолютної величини сигналу  $u_n^{(c)}$  у перехідному режимі може бути визначена як

$$|u_n^{(c)}| \leq \|W_c'\|_1 \sup_{0 \leq n < \infty} |\nabla \varphi_n^0|, \quad (26)$$

де  $\|W_c'\|_1$  –  $l_1$ -норма передавальної функції

$$W_c'(z) = \frac{z - e^{-\beta_1}}{b_1^0 z + b_2^0}.$$

Оскільки  $\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} z_1 = -1$ , то  $\|W_c'\|_1 \rightarrow \infty$  при  $\beta_1 \rightarrow 0$ . А це означає, що оцінка зверху амплітуди коливань сигналу  $u_n^{(c)}$  у перехідному режимі, яка фігурує в правій частині (26), необмежено зростає при необмеженому зростанні частоти квантування  $\tilde{f}_0 = \frac{1}{T_0}$ .

Для експериментального дослідження динамічних процесів, які виникають при виконанні умови інваріантності для дискретних моментів часу  $t = nT_0$ , моделювалась зображена на рис.1, а слідкуюча система (1), (12), (18), коли  $k = 5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 0,1 \text{ с}$ ,  $\tau_2 = 0$ , при  $T_0 = 0,1 \text{ с}$  і  $T_0 = 0,01 \text{ с}$ . Як і в роботі [9], на етапі моделювання проводився аналіз похибки цифрової системи автосупроводження літального апарату, який рухається з Півночі на Південь зі сталою швидкістю  $v = 264 \text{ м/с}$  по прямолінійній траєкторії на певній відстані  $L$  від РЛС. В умовах модельних експериментів задавальний вплив  $y^0(t)$ , що визначав поточне кутове положення (азимут) в момент часу  $t$ , описувався функцією

$$\varphi^0(t) = \pi/2 + \arctg \frac{vt/l_0 - \sqrt{1 - (L/l_0)^2}}{L/l_0}, \text{ рад}, \quad (27)$$

у якій через  $l_0$  позначена його відстань від РЛС у момент  $t = 0$ . Моделювалась ситуація, коли  $l_0 = 1500 \text{ м}$ , а  $L = 750 \text{ м}$ .

Перехідні процеси в системі (1), (7), (18), (20), в якій умовно припускалось, що задавальний вплив (27) доступний для вимірювання, а  $k_s = 0,54$ , графічно представлені на рис. 3.

Як видно з цих графіків, при підвищенні частоти квантування  $\tilde{f}_0$  від 10 Гц до 100 Гц тривалість  $t_\infty$  перехідного процесу ніяк не зменшується. Натомість амплітуда коливань компенсуючого впливу  $u^{(c)}[(n+\sigma)T_0]$ , який у неперервному часі  $t = (n+\sigma)T_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 < \sigma < 1$ ), залишається незмінним протягом кожного інтервалу  $(nT_0, (n+1)T_0)$  і рівним значенню  $u_n^{(c)}$ , суттєво зростає при переході від частоти  $\tilde{f}_0 = 10 \text{ Гц}$  до частоти  $\tilde{f}_0 = 100 \text{ Гц}$ .

Аналіз процесу формування послідовності  $\{u_n^{(c)}\}$  за алгоритмом (12) показує, що коли інтервал квантування  $T_0$  зменшується, то після завершення

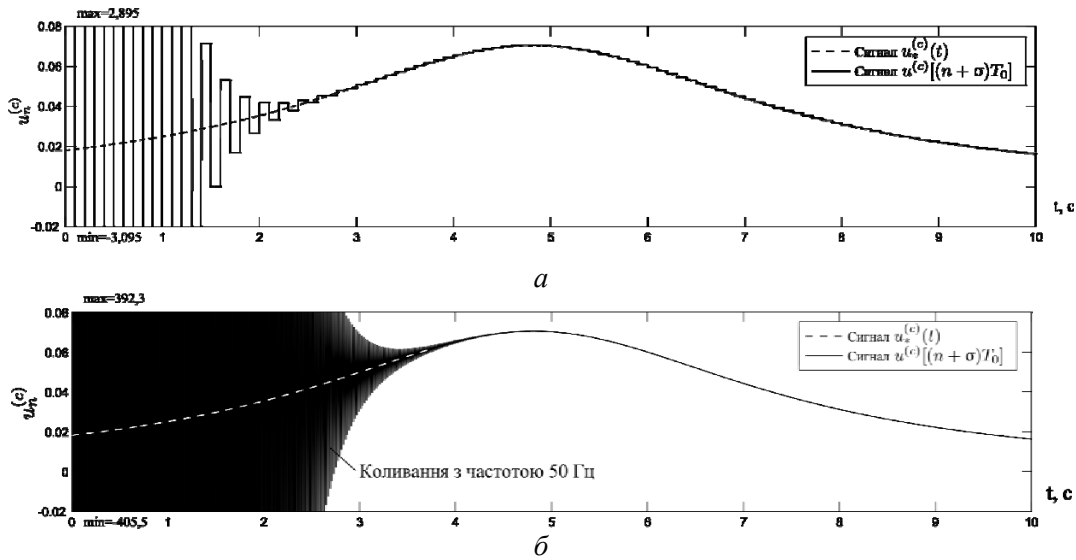


Рис. 3. Компенсуючі сигнали в цифровій та неперервній інваріантних системах:

а)  $T_0 = 0,1$  с, б)  $T_0 = 0,01$  с

перехідного процесу, тобто при  $n > n_\infty$ , змінна  $u^{(c)}[(n+\sigma)T_0]$  наближається до змінної  $u^{(c)}(t)$ , яка формується для забезпечення інваріантності похибки  $e(t)$  для всіх  $t \in [0, +\infty]$ , а не тільки для всіх  $t = nT_0$  (у відповідності до виразу (20)).

### Аналіз прихованих коливань

Для дослідження прихованих коливань, що спостерігаються в інваріантних цифрових слідкуючих системах, скористаємось, як і в роботі [6, гл. II, §4], класичним методом модифікованого  $z$ -перетворення. У відповідності до цього методу запишемо модифіковану дискретну передавальну функцію  $W_0(z, \sigma)$  приведеної неперервної частини

$$W_0(z, \sigma) = \frac{b_0^0(\sigma)z^2 + b_1^0(\sigma)z + b_2^0(\sigma)}{(z-1)(z-e^{-\beta_1})}, \quad (28)$$

у якій коефіцієнти  $b_0^0(\sigma)$ ,  $b_1^0(\sigma)$ ,  $b_2^0(\sigma)$  обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned} b_0^0(\sigma) &= k\tau_1(\beta_1 + e^{-\beta_1\sigma} - 1), \\ b_1^0(\sigma) &= k\tau_1(1 + \beta_1 + e^{-\beta_1} - \beta_1\sigma - 2e^{-\beta_1\sigma} - \beta_1\sigma e^{-\beta_1}), \\ b_2^0(\sigma) &= k\tau_1(e^{-\beta_1} + \beta_1\sigma e^{-\beta_1} - e^{-\beta_1} - \beta_1 e^{-\beta_1}), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

наведеними в [6, с.56], де  $\sigma \in [0, 1]$ .

Передавальна функція  $W(z, \sigma)$  від задавального впливу  $\Phi^0(z)$  до вихідної змінної  $\Phi(z, \sigma)$  в схемі рис. 1 а з врахуванням (20) і (28) має вигляд

$$W(z, \sigma) = \frac{b_0^0(\sigma)z^2 + b_1^0(\sigma)z + b_2^0(\sigma)}{b_1^0z + b_2^0}. \quad (30)$$

На основі (30) можна записати рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned} \varphi[(n+\sigma)T_0] &= \frac{b_0^0(\sigma)}{b_1} \varphi^0[(n+1)T_0] + \\ &+ \frac{b_1^0(\sigma)}{b_1^0} \varphi^0[nT_0] + \frac{b_2^0(\sigma)}{b_1^0} \varphi^0[n-1]T_0 - \\ &- \frac{b_2}{b_1} \varphi[(n-1+\sigma)T_0], \end{aligned} \quad (31)$$

яке зв'язує вихідну змінну  $\varphi(t)$  в будь-який момент часу  $t = (n+\sigma)T_0$  з задавальним впливом в дискретний момент часу  $t = nT_0$ .

Приймаючи до уваги, що похибка системи  $e(t)$ , яка за визначенням (2) може бути представлена у формі

$$e[(n+\sigma)T_0] = \varphi^0[(n+\sigma)T_0] - \varphi[(n+\sigma)T_0],$$

з (31) знаходимо

$$e[(n+\sigma)T_0] = \frac{b_2}{b_1} \varphi^0[(n-1+\sigma)T_0] +$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi^0[(n + \sigma)T_0] - \frac{b_0^0(\sigma)}{b_1^0} \varphi^0[(n + 1)T_0] - \\
& - \frac{b_0^0(\sigma)}{b_1^0} \varphi^0[nT_0] - \frac{b_2^0(\sigma)}{b_1^0} \varphi^0[n - 1]T_0 + \\
& + \frac{b_2}{b_1} e[(n - 1 + \sigma)T_0]. \quad (32)
\end{aligned}$$

Співвідношення (32) разом з виразом (29) дозволяє обчислити похибку інваріантної системи  $e(t)$  в будь-який поточ-

ний момент часу  $t = (n + \sigma)T_0$ . А це дає можливість чисельно проаналізувати прихований рух такої системи.

Як показують результати моделювання, за умов інваріантності для дискретних моментів часу протягом перехідного процесу виникають приховані коливання похибки  $e(t)$ , викликані коливанням сигналу  $u_n^{(c)}$ , з частотою  $\tilde{f}$ , рівною половині частоті квантування  $\tilde{f}_0$  (рис. 4).

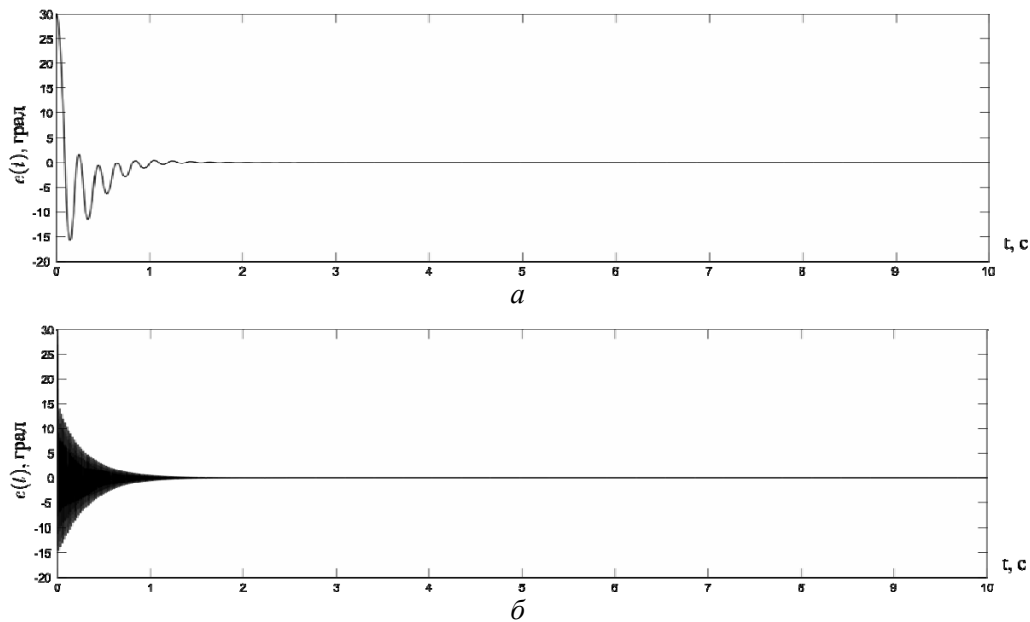


Рис. 4. Динамічні процеси в інваріантних системах при  $0 \leq t \leq 10$ с:

а)  $T_0 = 0,1$ с, б)  $T_0 = 0,01$ с.

На рис. 5 наведені графіки усталених процесів, які спостерігались при проведенні модельних експериментів. Як видно, цей процес характерний появою прихованих пульсацій похибки з частотою  $\tilde{f}_\infty$ , рівною частоті квантування. Проте амплітуда цих пульсацій суттєво мала, причому вона зменшується, коли частота квантування  $\tilde{f}_0$  збільшується: при  $\tilde{f}_0 = 10$ Гц ця амплітуда складає величину порядку  $0,4 \cdot 10^{-3}$  град, тоді як при  $\tilde{f}_0 = 100$ Гц вона оцінюється величиною порядку  $0,5 \cdot 10^{-6}$  град.

**Оцінка робастної стійкості інваріантної системи.**

Повернемось тепер до слідкуючої системи з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом (рис. 1 б) і розглянемо той важливий випадок, коли перетворювачі дискретних сигналів  $e_n$  і  $\varphi_n$  неідентичні ( $W'(z) \neq W''(z)$ ). В цьому випадку оцінка опосередкованого задавального впливу  $\tilde{\varphi}_n^0$  вже не буде співпадати з дійсним його значенням:

$$\tilde{\varphi}_n^0 \neq \varphi_n^0. \quad (33)$$

Якщо далі використовувати той же самий алгоритм прогнозування, реалізація якого була покладена в роботі [9] на екстраполятор, що здійснює перетворення послідовності  $\{\tilde{\varphi}_n^0\}$  у послідовність  $\{\tilde{\varphi}_n^0\}$  з



деяким оператором  $\Gamma: \{\tilde{\varphi}_n^0\} \rightarrow \{\tilde{\varphi}_{n+1}^0\}$ , то в умовах (33) прогнозоване значення  $\tilde{\varphi}_{n+1}^0$

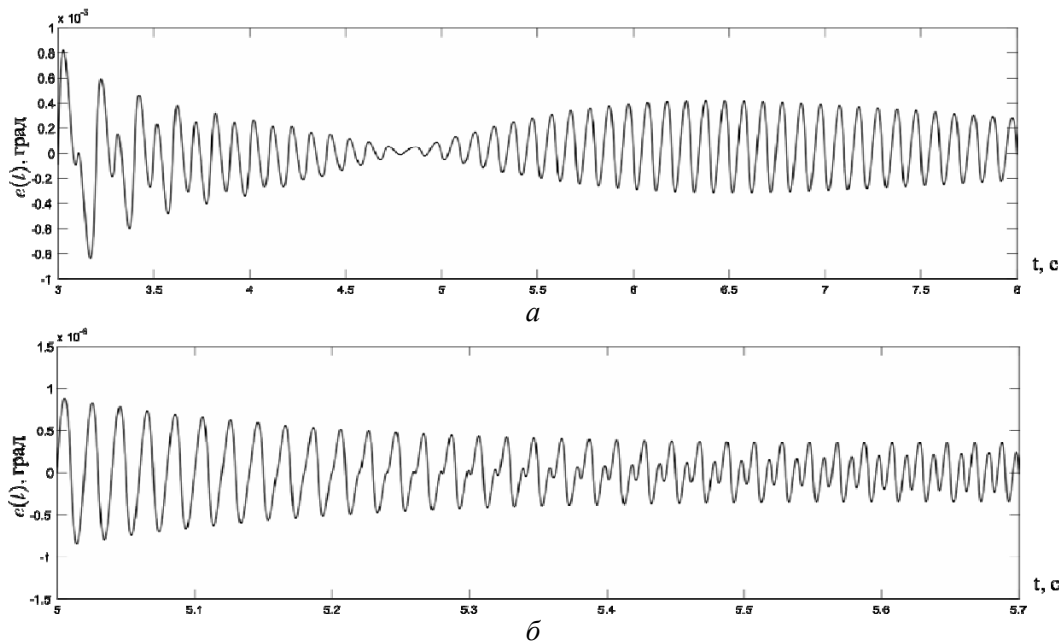


Рис. 5. Усталені процеси, які спостерігаються в інваріантних системах:

а)  $T_0 = 0,1\text{с}$ , б)  $T_0 = 0,01\text{с}$ .

опосередкованого сигналу буде відрізнятися від його дійсного значення  $\tilde{\varphi}_{n+1}^0$ :

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^0 \neq \tilde{\varphi}_{n+1}^0.$$

Для перевірки працездатності системи з опосередкованим зв'язком за задавальним впливом при  $W'(z) \neq W''(z)$  проводилось її моделювання за умов, що

$$W'(z) = \frac{0.8z}{z - 0.03}, \quad W''(z) = \frac{1.2z}{z - 0.06}.$$

Результати моделювання графічно представлені на рис. 6. Ці результати показують, що система залишається стійкою, хоча в усталеному режимі в ній з'являється похибка  $e_n$ , яка вже не буде тотожно рівною 0, коли  $W''(z) \neq 1$ .

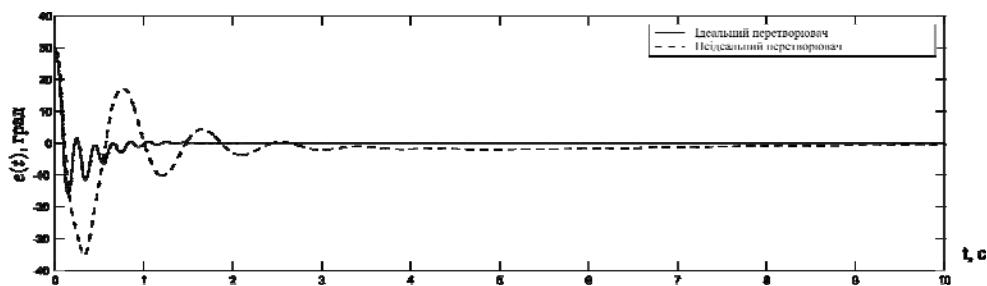


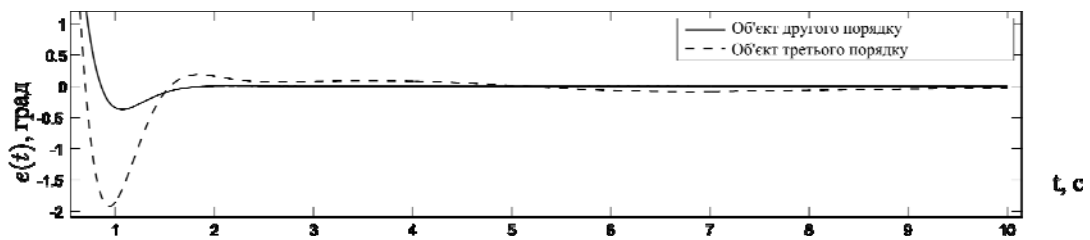
Рис. 6. Динамічні процеси в системі при неідентичних вимірювачах сигналів  $e_n$  і  $\varphi_n$

### Робастність системи за наявності немодельованої динаміки

Нехай тепер  $\tau_2 \neq 0$ . Тоді передавальна функція  $W_0(z)$  описуватиметься виразом (5), а не виразом (8), який визначає передавальну функцію своєрідної опорної моделі слідкуючого приводу. Ясно, що коли передавальну функцію  $W_c(z)$  дис-

кретного фільтра в схемі рис. 1 а вибирати, як і раніше, у вигляді (20), то в системі неминуче з'явиться немодельована динаміка.

Динамічні процеси в системі (1), (18), (20), що спостерігались при  $\tau_2 = 0$  і  $\tau_2 \neq 0$ , зображені на рис. 7.

Рис. 7. Результати моделювання системи (1), (18), (20) при  $\tau_2 = 0$  і  $\tau_2 \neq 0$ .

З рис. 7 видно, що система залишається робастною навіть за наявності немодельованої динаміки. При цьому інваріантність похибки  $e_n$  не забезпечується.

### Висновки

1. На відміну від неперервних слідкуючих систем з прямим зв'язком за задавальним впливом в цифрових слідкуючих системах, в яких забезпечується інваріантність для дискретних моментів часу, формування компенсуючого сигналу неодмінно супроводжується перехідним процесом при як завгодно високій частоті квантування. Такий процес носить коливальний характер з частотою, рівною половині частоти квантування  $\tilde{f}_0$ , причому його тривалість зменшується при зростанні  $\tilde{f}_0$ , залишаючись обмеженою знизу певною величиною, що залежить тільки від сталої часу слідкуючого приводу. Натомість початкова амплітуда коливань компенсуючого сигналу у перехідному режимі суттєво зростає при зростанні  $\tilde{f}_0$ .

2. При виконанні умов інваріантності для дискретних моментів часу у випадку, коли швидкість зміни задавального сигналу не є сталою величиною, в усталеному режимі спостерігаються приховані коливання з частотою, рівною  $\tilde{f}_0$ .

3. Уперше експериментально (шляхом моделювання) встановлено, що при неідеальних вимірювачах похибки системи і вихідної змінної та за наявності немодельованої динаміки, система залишається робастно стійкою.

### Список літератури

1. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н., Житецкий Л.С. Методология конструирования оптимальных систем стохастической

стабилизации. — К.: Книжное изд-во НАУ, 2006. — 440 с.

2. Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике. — К.: Гостехиздат УССР, 1963. — 376 с.

3. Менский Б.М. Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении. — М.: Наука, 1972. — 248 с.

4. Кунцевич В.М., Кременчуло Ю.В. Теория инвариантности импульсных и самонастраивающихся импульсных систем // Тр. II Международного конгресса ИФАК. Том 6. Дискретные и самонастраивающиеся системы. — М.: Наука, 1965. — С. 165–184.

5. Житецкий Л.С. Про инвариантность комбинированных импульсных систем программного керування // Автоматика. — 1967. — № 6. — С. 83–85.

6. Житецкий Л.С. Вопросы компенсации динамических ошибок цифровых систем программного управления: Дис. ... канд. техн. наук / АН УССР. Ин-т кибернетики. — К., 1968. — 186 с.

7. Тр. Научного семинара «70 лет теории инвариантности» / Под ред. С.И. Васильева. — М.: изд-во ЛКИ, 2008. — 256 с.

8. Зайцев Г.Ф., Стеклов В.К. Автоматические системы с дифференциальными связями. — К.: Техніка, 1984. — 167 с.

9. Житецкий Л.С., Сущенко О.А., Пономарьов О.С., Сенькович О.В. Синтез  $\varepsilon$ -инвариантной цифровой системы автосупроводження літальних апаратів // Проблеми інформатизації та управління. — 2009. — №4(28). — С. 40–49.

Подано до редакції 01.03.10